2019 年　順天堂大学・医学部　解答速報（数学）

I　$\boxed{}$ に適する解答をマークせよ．ただし，同一問題で同じ記号の $\boxed{}$ がある場合は同一の値がはいる．

(1)(a)　$z = \cos\dfrac{2}{7}\pi + i\sin\dfrac{2}{7}\pi,\ w = z + z^2 + z^4$ とする．

$w + \overline{w} = \boxed{アイ},\ w \cdot \overline{w} = \boxed{ウ}$ より，$\cos\dfrac{2}{7}\pi + \cos\dfrac{4}{7}\pi + \cos\dfrac{8}{7}\pi = \dfrac{\boxed{エオ}}{\boxed{カ}}$,

$\sin\dfrac{2}{7}\pi + \sin\dfrac{4}{7}\pi + \sin\dfrac{8}{7}\pi = \dfrac{\sqrt{\boxed{キ}}}{\boxed{ク}}$ を得る．

(b)　$\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2},\ \beta = \dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$ とすると $|\alpha+\beta| = \dfrac{\sqrt{\boxed{ケ}} - \sqrt{\boxed{コ}}}{\boxed{サ}}$,

$|\alpha-\beta| = \dfrac{\sqrt{\boxed{シ}} + \sqrt{\boxed{ス}}}{\boxed{セ}}$ $\left(\text{ただし} \boxed{シ} > \boxed{ス}\right)$ となる．

γ の実部が正で $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ が複素数平面上で正三角形となるとき，

$\gamma = \dfrac{\boxed{ソ} + \sqrt{\boxed{タ}}}{\boxed{チ}} + \dfrac{\boxed{ツ} + \sqrt{\boxed{テ}}}{\boxed{ト}} i$ である．

$\boxed{解答}$　(1)(a)　$\boxed{アイ} = -1,\ \boxed{ウ} = 2,\ \dfrac{\boxed{エオ}}{\boxed{カ}} = \dfrac{-1}{2}$, $\dfrac{\sqrt{\boxed{キ}}}{\boxed{ク}} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$

(b)　$\dfrac{\sqrt{\boxed{ケ}} - \sqrt{\boxed{コ}}}{\boxed{サ}} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{\boxed{シ}} + \sqrt{\boxed{ス}}}{\boxed{セ}} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

$\dfrac{\boxed{ソ} + \sqrt{\boxed{タ}}}{\boxed{チ}} + \dfrac{\boxed{ツ} + \sqrt{\boxed{テ}}}{\boxed{ト}} i = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} i$

(2)　1 から 8 までの 8 個の数から異なる数を選んで並べることにより 2 桁以上 4 桁以下の正の整数を作る．このようにしてつくられた正の整数の集合を A とする．A の要素であり，どの 2 つの桁の和も 9 にならない数からなる集合を A_1 とする．A の要素であり，3 桁以下の数でどの 2 つの桁の和も 9 にならない数からなる集合を A_2 とする．

1)　$x \in A_1$ であることは，$x \in A_2$ であることの $\boxed{\text{ア}}$．

2)　A の要素の個数は $\boxed{\text{イウエオ}}$ 個である．

3)　A_1 の要素の個数は $\boxed{\text{カキク}}$ 個であり，A_2 の要素の個数は $\boxed{\text{ケコサ}}$ 個である．

4)　A の要素で小さい方から数えて 600 番目の数は $\boxed{\text{シスセソ}}$ である．

ただし，$\boxed{\text{ア}}$ は以下の中から選択せよ．

(a)　必要条件であるが，十分条件ではない

(b)　十分条件であるが，必要条件ではない

(c)　必要十分条件である

(d)　必要条件でも，十分条件でもない

$\boxed{\text{解答}}$　1)　$\boxed{\text{ア}}$: (a)　2)　$\boxed{\text{イウエオ}} = 2072$　3)　$\boxed{\text{カキク}} = 624$, $\boxed{\text{ケコサ}} = 240$　4)　$\boxed{\text{シスセソ}} = 1874$

(3)　下図は

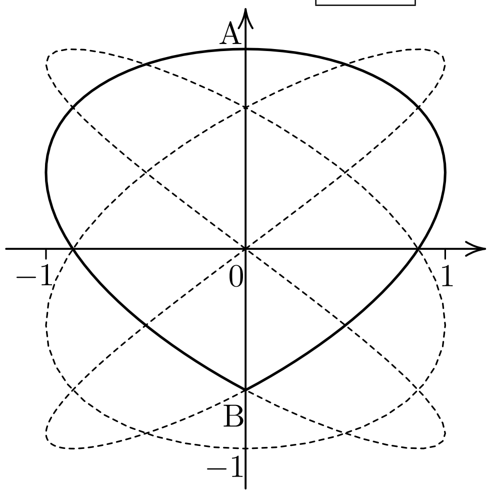
$$\begin{cases} x = \sin 8\,\theta \\ y = \sin 6\,\theta \end{cases} \qquad (0 \leqq \theta \leqq \pi)$$

であらわされるリサージュ曲線 L で，下図の実線部分は点 A(0, 1) を通る曲線 L の一部である．また，点 B(0, β) ($-1 < \beta < 0$) は L 上の点である．

点 A では $\theta = \dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\pi$ であり，B では小さい順に $\theta = \dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\pi$, $\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\pi$ で，$\beta = \dfrac{\boxed{キ}\sqrt{\boxed{ク}}}{\boxed{ケ}}$ である．

実線で囲まれた図形のうち $x \geqq 0$ となる部分の面積は，$x(\theta) = \sin 8\,\theta$, $y(\theta) = \sin 6\,\theta$ とすると $\displaystyle\int_\beta^1 x\,dy = \int_b^t \boxed{コ}(\sin\boxed{サ}\theta + \sin\boxed{シス}\theta)\,d\theta$ と表すことができる．ここで $b = \dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}\pi$, $t = \dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\pi$ である．

よって実線で囲まれた図形全体の面積は $\dfrac{\boxed{タチ}\sqrt{\boxed{ツ}}}{\boxed{テ}}$ となる．



解答　$\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\pi = \dfrac{3}{4}\pi$, $\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\pi = \dfrac{5}{8}\pi$, $\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\pi = \dfrac{7}{8}\pi$, $\dfrac{\boxed{キ}\sqrt{\boxed{ク}}}{\boxed{ケ}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$, $\boxed{コ}(\sin\boxed{サ}\theta + \sin\boxed{シス}\theta) = 3(\sin 2\theta + \sin 14\theta)$, $\dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}\pi = \dfrac{7}{8}\pi$,

$\dfrac{\boxed{タチ}\sqrt{\boxed{ツ}}}{\boxed{テ}} = \dfrac{12\sqrt{2}}{7}$

II $\boxed{}$ に適する解答をマークせよ．ただし，同じ記号の $\boxed{}$ がある場合は同一の値がはいる．

関数 $f(x)$ を用いて漸化式が $x_{n+1}=f(x_n)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ で与えられる数列 $\{x_n\}$ について考える．

(1) $x_1=3$，$f(x)=\dfrac{3}{4}x+3$ とすると $x_2=\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$，$x_3=\dfrac{\boxed{\text{エオカ}}}{\boxed{\text{キク}}}$ となり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\boxed{\text{ケコ}}$ となる．

(2) $x_1=3$，$f(x)=\dfrac{3}{4}[x]+3$ とすると $x_2=\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$，$x_3=\dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ となり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ となる．ただし，実数 a に対して $[a]$ は a を超えない最大の整数とする．

(3) $x_1=\dfrac{1}{2}$，$f(x)=\dfrac{3x}{1+x}$ とすると $x_5=\dfrac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テト}}}$，$x_9=\dfrac{\boxed{\text{ナニヌネ}}}{\boxed{\text{ノハヒフ}}}$ となり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\boxed{\text{ヘ}}$ となる．

(4) $f(x)=ax(1-x)$ （a は実数）とする．$0\leqq x_1\leqq 1$ を満たすすべての x_1 に対して $0\leqq x_n\leqq 1$ $(n=2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つための必要十分条件は $\boxed{\text{ホ}}\leqq a\leqq\boxed{\text{マ}}$ である．このうちで $x_1=x_2$ となる 0 以外の x_1 が存在するのは $\boxed{\text{ミ}}<a\leqq\boxed{\text{マ}}$ のときで，このような x_1 は a を用いて $x_1=\boxed{\text{ム}}-\dfrac{\boxed{\text{メ}}}{a}$ と表わされる．同様に $x_1<x_2$，$x_3=x_1$ を満たす x_1 が存在するのは $\boxed{\text{モ}}<a\leqq\boxed{\text{マ}}$ のときで，x_1 は a を用いて $\dfrac{a+\boxed{\text{ヤ}}-\sqrt{\left(a+\boxed{\text{ユ}}\right)\left(a-\boxed{\text{ヨ}}\right)}}{2a}$ と表される．

解答　(1) $\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}=\dfrac{21}{4}$，$\dfrac{\boxed{\text{エオカ}}}{\boxed{\text{キク}}}=\dfrac{111}{16}$，$\boxed{\text{ケコ}}=12$　(2) $\dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}}=\dfrac{27}{4}$，$\dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}=\dfrac{39}{4}$　(3) $\dfrac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テト}}}=\dfrac{27}{14}$，$\dfrac{\boxed{\text{ナニヌネ}}}{\boxed{\text{ノハヒフ}}}=\dfrac{2187}{1094}$，$\boxed{\text{ヘ}}=2$，(4) $\boxed{\text{ホ}}=0$，$\boxed{\text{マ}}=4$，$\boxed{\text{ミ}}=1$，$\boxed{\text{ム}}-\dfrac{\boxed{\text{メ}}}{a}=1-\dfrac{1}{a}$，$\boxed{\text{モ}}=3$

$$\frac{a+\boxed{\text{ヤ}}-\sqrt{\left(a+\boxed{\text{ユ}}\right)\left(a-\boxed{\text{ヨ}}\right)}}{2a}=\frac{a+1-\sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a}$$

$\boxed{\textbf{III}}$

(1)　1050 と 819 の最大公約数をユークリッドの互除法を用いて求めよ．

(2)　2 つの正の整数 $a,\ b\ (a < b)$ があり，b を a で割った余りを r とする．$r \neq 0$ のとき，a と b の公約数 c は r の約数であることを示せ．

(3)　2 つの正の整数 $a,\ b\ (a < b)$ があり，それらの最大公約数を m とする．このとき，ある整数 $s,\ t$ を用いて $m = sa + tb$ と表されることを示せ．

解答

(1)　一般に，a と b の最大公約数を $\mathrm{G.C.D}(a,\ b)$ と表すこととする．ユークリッドの互除法より

$$\begin{aligned}
\mathrm{G.C.D}(1050,\ 819) &= \mathrm{G.C.D}(819,\ 231) && (1050 = 819 \times 1 + 231 \text{ より}) \\
&= \mathrm{G.C.D}(231,\ 126) && (819 = 231 \times 3 + 126 \text{ より}) \\
&= \mathrm{G.C.D}(126,\ 105) && (231 = 126 \times 1 + 105 \text{ より}) \\
&= \mathrm{G.C.D}(105,\ 21) && (126 = 105 \times 1 + 21 \text{ より}) \\
&= 21 && (105 = 21 \times 5 \text{ より})
\end{aligned}$$

よって，1050 と 819 の最大公約数は 21.　　$\cdots$(答)

(2)　b を a で割った商を q とすると，条件より

$$b = aq + r \quad \Longleftrightarrow \quad r = b - aq \qquad \cdots ①$$

となる．ここで，$a,\ b$ は共に，a と b の公約数 c の倍数となるので，①より，r も c の倍数となる．よって c は r の約数ともなる．　(証明終)

(3)　整数 $s,\ t$ を用いて，$as + bt$ と表される正の整数のうち，最小のものを d とする．このとき，

$$as_0 + bt_0 = d \qquad \cdots ②$$

となる整数の組 $(s_0,\ t_0)$ が存在する．このとき，a が d の倍数であることを示す．

a を d で割った商を q，余りを $r\ (0 \leqq r < d)$ とおくと $a = dq + r$ となり，この式に②を代入すると，

$$a = (as_0 + bt_0)q + r \quad \Longleftrightarrow \quad a(1 - qs_0) + b \cdot (-qt_0) = r$$

となるが，正整数 d の最小性より $r = 0$ となるしかない．よって a は d の倍数であることが示される．

同様にして b も d の倍数であることが示され，d は a と b の公約数となることが示される．一方②より，d は a と b の最大公約数 m の倍数となるので，$d = m$ となるしかなく，$sa + tb = m$ となる整数 $(s,\ t)$ として，$(s,\ t) = (s_0,\ t_0)$ が存在する．　(証明終)

講評

大問が 3 問で，$\boxed{\textbf{I}}$ が穴埋め形式の小問集合，$\boxed{\textbf{II}}$ が大問の穴埋め形式．$\boxed{\textbf{III}}$ が記述式の大問であったことは例年から特に変化はない．

$\boxed{\textbf{I}}$ 小問集合．

(1)(a) は 1 の 7 乗根に関する問題．2008 年慈恵医大を始め，類題が過去問に多数出題されている．もちろん初見であっても，丁寧に誘導がついているので，解くのに何ら困ることはないだろう．

(1)(b) は前問に続き，複素数の問題だが，本問は本格的に複素数平面に絡んだ問題．とはいっても，問われてる内容は基本的なものばかりなので，これも最後まで落とせない．

(2) は 2 桁～4 桁の整数を作るという場合の数の問題．実は類題が 2000 年の東大で出題されている．冷静に考えていけば最後まで正答できるはずの問題なので，ここでミスなく解けているかどうかが，総点に大きく左右したと思われる．

(3) はリサージュ曲線に関する面積の問題．グラフも問題文に記されており，特段難しいこともないだろう．本問も計算量や考えるべきことが多いので，この問題で如何に多く正答できるかが分かれ目になると思われる．

$\boxed{\textbf{II}}$ $x_{n+1} = f(x_n)$ という漸化式において，関数 $f(x)$ が様々なタイプのもの（1 次式，ガウス記号を含む 1 次式，2 次式 $\cdots$）において，x_n がどうなるか，という問題．

最初の (1) は余りにも定型的なタイプの漸化式であり，これは落とせない．

(2) はガウス記号を含む漸化式であり，この挙動がどうなるか、という思考力を試す問題であった．

(3) は簡単な分数漸化式であり，その解き方を知っているものは最後まで難なく解ききれるだろう．

それに対して，(4) は一気に見慣れないタイプの漸化式となる（「ロジスティック写像」と呼ばれるタイプの漸化式である）．本問は一般項 $\{x_n\}$ を求めるのは困難であり，x_3 まで考える問題で打ち止めされている．それでも最後まで解ききるのは難しいだろう．2004 年の大阪大に同様の問題がある．

$\boxed{\textbf{III}}$ ユークリッドの互除法と 1 次不定方程式の一般論に関する証明問題．具体的な数値に関する整数解を求める手法なら知ってる人も多いかもしれないが，一般論の証明は困難だろう．正直，(3) は $\boxed{\text{解答}}$ のような上手い解法は試験中では思いつかないだろう．最後の (3) は「なんとなく」のレベルで証明できていれば十分だと思われる．

昨年もやや解きにくい問題はあったが，最後の $\boxed{\textbf{III}}$ は明らかに去年より解きにくいので，昨年より若干難化したと思われる．目標は 60 %．