2019年　杏林大学（医学部）　解答速報（数学）

I

(1)　$U=\{x|x$ は 100 未満の正の整数 $\}$ を全体集合，集合 S の要素の個数を $n(S)$ とする．U の部分集合

$$A=\{x|x \text{ は } 3 \text{ の倍数 }\},\ B=\{x|x \text{ は } 4 \text{ の倍数 }\},\ C=\{x|x \text{ は } 5 \text{ の倍数 }\}$$

に対し，$n(A\cap B)=$ $\boxed{\text{ア}}$，$n(\overline{A\cap B})=$ $\boxed{\text{イウ}}$，$n(A\cap B\cap C)=$ $\boxed{\text{エ}}$，$n((A\cup B)\cap\overline{C})=$ $\boxed{\text{オカ}}$ が成り立つ．

(2)　X，Y，Z の 3 人がこの順番で，1 から 5 までの 5 枚の番号札が入った袋から，番号札を 1 枚取り出す．取り出された番号札は袋に戻さないものとし，最も小さい数の番号札 2 と 2 番目に小さい数の番号札を引いた 2 人が賞品を受け取る．

X が 3 の番号札を引く場合の数は $\boxed{\text{キク}}$ であり，X が 3 の番号札を引いて商品を受け取る場合の数は $\boxed{\text{ケコ}}$ である．

X が 3 以下の番号札を引いて賞品を受け取る確率は $\dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{スセ}}}$ となる．

X が 2 以上の番号札を引いて Z が賞品を受け取る確率は $\dfrac{\boxed{\text{ソタ}}}{\boxed{\text{チツ}}}$ となる．

X の引いた番号札が 1 でないとき，Z が賞品を受け取る確率は $\dfrac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$ となる．

$\boxed{\text{解答}}$　(1)　$\boxed{\text{ア}}=8$，$\boxed{\text{イウ}}=50$，$\boxed{\text{エ}}=1$，$\boxed{\text{オカ}}=40$　(2)　$\boxed{\text{キク}}=12$，$\boxed{\text{ケコ}}=10$，$\dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{スセ}}}=\dfrac{17}{30}$，$\dfrac{\boxed{\text{ソタ}}}{\boxed{\text{チツ}}}=\dfrac{17}{30}$，$\dfrac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナニ}}}=\dfrac{17}{24}$

II　実数を定義域とする関数 $f(x)=\dfrac{x}{2x^2+1}$ に対し $y=f(x)$ のグラフを曲線 C，x 座標が $\dfrac{1}{2}$ である曲線 C 上の点を P として，以下の問いに答えよ．

(a)　$f(x)$ は，$x=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}}$ において極大値 $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$ を取る．曲線 C は変曲点を $\boxed{\text{オ}}$ 個持ち，そのうち x 座標が最大のものは $\left(\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}}},\ \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}\right)$ である．

(b)　点 P における，曲線 C の接線 l の方程式は $y=\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}x+\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ であり，曲線 C と接線 l の P とは異なる交点は $\left(-\boxed{\text{セ}},\ -\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}\right)$ である．

曲線 C と接線 l で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}+\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}\log_e\boxed{\text{ニ}}$ である．

(c)　点 P を通る傾き m の直線が，曲線 C と複数の共有点を持つのは

$$\frac{\boxed{\text{ヌ}}-\sqrt{\boxed{\text{ネ}}}}{\boxed{\text{ノ}}}\leqq m\leqq\frac{\boxed{\text{ヌ}}+\sqrt{\boxed{\text{ネ}}}}{\boxed{\text{ノ}}}$$

のときである．

$\boxed{\text{解答}}$　(a)　$\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，$\boxed{\text{オ}}=3$，$\left(\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}}},\ \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}\right)=\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ \dfrac{\sqrt{6}}{8}\right)$　(b)　$\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}=\dfrac{2}{9}$，$\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}=\dfrac{2}{9}$，$\left(-\boxed{\text{セ}},\ -\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}\right)=\left(-2,\ -\dfrac{2}{9}\right)$，$\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}+\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}\log_e\boxed{\text{ニ}}=\dfrac{5}{36}+\dfrac{1}{4}\log_e 6$　(c)　$\dfrac{\boxed{\text{ヌ}}\pm\sqrt{\boxed{\text{ネ}}}}{\boxed{\text{ノ}}}=\dfrac{2\pm\sqrt{6}}{6}$

III　$\boxed{\text{ソ}}$ の解答は該当する解答群から最も適当なものを一つ選べ．

座標空間において，点 $\mathrm{A_0}$ を $(1,\ 1,\ 0)$，点 $\mathrm{B_0}$ を $(-1,\ -1,\ 0)$，点 $\mathrm{C_0}$ を $(1,\ -1,\ 0)$ とし，xy 平面上の点 P_n から点 P_{n+1} を定める下記の操作を M とする．

操作 M：点 P_n を z 軸の正の方向に 2 だけ平行移動した後，x 軸のまわりに 1 回転させて得られる点 P_n の軌跡と xy 平面との交点のうち，y 座標が最も大きい点を P_{n+1} と定める．

(a)　点 $\mathrm{A_0}$ に対して操作 M を連続して n 回施して得られる点を A_n，この点の y 座標を a_n とすると，

$$a_1 = \sqrt{\boxed{\text{ア}}},\ a_{n+1} = \sqrt{a_n{}^{\boxed{\text{イ}}} + \boxed{\text{ウ}}}\quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つ．したがって，$a_n = \sqrt{\boxed{\text{エ}}\,n + \boxed{\text{オ}}}$ と表せる．

(b)　$0 \leqq t \leqq 1$ を満たす実数 t に対し，線分 $\mathrm{A_0B_0}$ を $t : 1-t$ に内分する点を $\mathrm{Q_0}$ とする．点 $\mathrm{Q_0}$ を z 軸の正の方向に 2 だけ平行移動した点と x 軸との距離は，$\sqrt{\boxed{\text{カ}}\,t^2 - \boxed{\text{キ}}\,t + \boxed{\text{ク}}}$ である．

t を $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲で変化させたとき，点 $\mathrm{Q_0}$ に対して操作 M を 1 回施して得られる点 $\mathrm{Q_1}$ は，曲線

$$\boxed{\text{ケ}}\,x^{\boxed{\text{コ}}} + y^2 = \boxed{\text{サ}}$$

上に存在する．

(c)　線分 $\mathrm{A_0C_0}$ を z 軸の正の方向に 2 だけ平行移動した線分上の点と x 軸との距離の最小値は $\boxed{\text{シ}}$ である．線分 $\mathrm{A_0C_0}$ 上の点に対し，操作 M を 1 回施して得られる点の集合は，長さ $\sqrt{\boxed{\text{ス}}} - \boxed{\text{セ}}$ の線分となる．

(d)　三角形 $\mathrm{A_0B_0C_0}$ の周および内部の点に対し，操作 M を 1 回施して得られる点の集合を D とする．集合 D が表す領域の概形は $\boxed{\text{ソ}}$ である．　（$\boxed{\text{ソ}}$ の解答群は略）

解答　(a) $\sqrt{\boxed{\text{ア}}} = \sqrt{5}$, $\sqrt{a_n{}^{\boxed{\text{イ}}} + \boxed{\text{ウ}}} = \sqrt{a_n{}^2 + 4}$, $\sqrt{\boxed{\text{エ}}\,n + \boxed{\text{オ}}} = \sqrt{4n+1}$　(b) $\sqrt{\boxed{\text{カ}}\,t^2 - \boxed{\text{キ}}\,t + \boxed{\text{ク}}} = \sqrt{4t^2 - 4t + 5}$, $\boxed{\text{ケ}}\,x^{\boxed{\text{コ}}} + y^2 = \boxed{\text{サ}}$ ： $-x^2 + y^2 = 4$　(c) $\boxed{\text{シ}} = 2$, $\sqrt{\boxed{\text{ス}}} - \boxed{\text{セ}} = \sqrt{5} - 2$

(d) $\boxed{\text{ソ}}$ = ⑦

IV　x，y を正の実数，$f(x)$ を恒等的に 0 ではない微分可能な連続関数とし，$f'(x)$ はその導関数を表すものとする．

(a)　下記の 6 つの命題が，任意の正の実数 x，y に対して真となるように，$\boxed{\text{ア}}$ 〜 $\boxed{\text{カ}}$ の解答として適当なものを，解答群の中からすべて選べ．

- $f(x) = \boxed{\text{ア}} \Longrightarrow f(x+y) = f(x) \times f(y)$
- $f(x) = \boxed{\text{イ}} \Longrightarrow f(x \times y) = f(x) + f(y)$
- $f(x) = \boxed{\text{ウ}} \Longrightarrow \{f(x)\}^2 - \{f'(x)\}^2 = f(2x)$
- $f(x) = \boxed{\text{エ}} \Longrightarrow f(f(x)) + f(x) = 0$
- $f(x) = \boxed{\text{オ}} \Longrightarrow \{f(x)\}^2 - \{f'(x)\}^2 = 1$
- $f(x) = \boxed{\text{カ}} \Longrightarrow 3f(x) + f'(x) = 0$

$\boxed{\text{ア}}$ 〜 $\boxed{\text{カ}}$ の解答群

① $3x+5$　② $-x$　③ $4x^2+1$　④ $\dfrac{1}{x+8}$　⑤ $6\log_2 x$

⑥ $\sin x$　⑦ $\cos x$　⑧ e^{-3x}　⑨ $\dfrac{e^x}{2} + \dfrac{e^{-x}}{2}$

(b)　設問 (a) で示した 6 つの命題のうち，上記解答群に挙げた関数に代えて，

$$f(x) = c \quad (\text{ただし，} c \text{ は 0 でない適当な定数})$$

とすると真となる命題は $\boxed{\text{キ}}$ 個存在する．また，設問 (a) で選んだ関数に対し，逆も真となる命題の数は $\boxed{\text{ク}}$ 個である．

(c)　$f(x+y) = f(x) \times f(y)$ を満たす関数 $f(x)$ に対し，

$$\lim_{x \to +0} f(x) = \boxed{\text{ケ}}$$

が成り立ち，$f(x \times y) = f(x) + f(y)$ を満たす関数 $f(x)$ に対し，

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \boxed{\text{コ}}$$

が成り立つ．

$\boxed{\text{解答}}$　(a)　$\boxed{\text{ア}}$ = ⑧，$\boxed{\text{イ}}$ = ⑤，$\boxed{\text{ウ}}$ = ⑦，$\boxed{\text{エ}}$ = ②，$\boxed{\text{オ}}$ = ⑨，$\boxed{\text{カ}}$ = ⑧　(b)　$\boxed{\text{キ}} = 3$，$\boxed{\text{ク}} = 1$　(c)　$\boxed{\text{ケ}} = 1$，$\boxed{\text{コ}} = 0$

講評

大問が 4 つで，全問穴埋め形式なのは，今までからと特に変わりは無かった．

I　前半の問題は集合の要素の個数の問題，これは全体集合 U が「100 未満の正の整数」ということに充分注意し，後はベン図を描いて集合の要素の個数を求められる．本問は落とせない．

後半は確率（条件付き確率含む）の問題である．ルール自体は若干複雑だが，全事象は ${}_5\mathrm{P}_3 = 60$ 通りしかないのだから，根気よく求めてゆくことも可能である．見慣れない確率の問題を苦手とする生徒も多いので，本問で若干差はつくのではないか？

II　数 III 微積分の総合問題．全体の中では最もオーソドックスな問題だろう．最後の問題以外は，極大値・変曲点・接線の式・グラフで囲まれる部分の面積を求める etc　どの問題もよくある問題で医学部受験生は（特に他の大問が解きにくいので,）これは落とせない．最後の小問 (c) も連立しさえすれば単なる 2 次方程式の実数解を考える問題であり，最も落とせない大問である．

III　座標空間における点列（数列）との融合問題．あまり見かけない題材である一方,「何が問われているか」ということをきちんと理解・把握していったら 1 問 1 問はそこまで難しいことは問われてない，最も差がついた問題であるといえるだろう．このように,「一見見慣れない問題だが，題意をしっかり理解して解く」という能力を問われているという，大学側の出題意図（メッセージ）として受け止めておくべきである．空間図形のセンスを幼いころから（強制的に？！）培っている中学受験経験者の方が有利な問題だと思われる．

IV　関数方程式の問題．時間無制限でこの問題を考える分には面白い問題だが，60 分の試験時間内ではきちんと解ききるのは酷だろう．(a) は，とりあえず当てはまる関数を見つけては答えていくのが戦略的か．(b) の $\boxed{\text{ク}}$ は難問．前半の $\boxed{\text{キ}}$ が申し訳程度のヒントになっているが，短い試験時間内では山勘で答えても致し方ない．

一方，(c) の関数方程式と極限の融合問題は，時たま医学部入試で見かける問題なので,（他の問題との兼ね合いもあるが）食らいついて解いていきたい問題である．最悪，(a) で答えた結果の具体的関数を用いて答えるという邪道 (?!) な方法もある (笑)

本大学は例年，解きにくい問題が出題される傾向にあるが，今年も相変わらずそうであった．大問 II と I(1) をしっかりと取りきり，残りの I(2)，III，(IV) でどれだけ部分点をかき集めるかが勝負になるだろう．目標は 60 %．