2019年　福岡大学（医学部）　解答速報（数学）

[I]　次の$\boxed{}$を埋めよ．答は解答用紙の該当欄に記入せよ．

(i)　11 桁の自然数 12345654321 に含まれる素因数で一番大きい数は$\boxed{（1）}$である．また，その数を 2 進数で表すと$\boxed{（2）}$である．

(ii)　n 人の得点 x_1，x_2，$\cdots$，x_n の平均を $\bar{x}$，分散を v とするとき，得点 x_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ の偏差値 t_i は $t_i = 50 + \dfrac{10(x_i - \bar{x})}{\sqrt{v}}$ によって計算される．$n = 3$ として，3 人の得点が $x_1 = 0$，$x_2 = 80$，$x_3 = m$　（m は 1 以上 100 以下の整数）のとき，0 点の人の偏差値 t_1 を m で表すと $t_1 = \boxed{（3）}$ であり，その偏差値の最小値は$\boxed{（4）}$である．

(iii)　数列 $\{a_n\}$ は $a_1 = \dfrac{1}{3}$，$a_{n+1} = a_n - (8n+4)a_n a_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ をみたすとする．このとき $\{a_n\}$ の一般項は$\boxed{（5）}$である．また，初項から第 100 項までの総和 S_{100} は$\boxed{（6）}$である．

$\boxed{\text{解答}}$　(i)　$\boxed{（1）} = 37$，$\boxed{（2）} = 100101$

(ii)　$\boxed{（3）} = 50 - \dfrac{10(m+80)}{\sqrt{2m^2 - 160m + 12800}}$，$\boxed{（4）} = 50 - 10\sqrt{2}$

(iii)　$\boxed{（5）} = \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$，$\boxed{（6）} = \dfrac{100}{201}$

$\boxed{\text{解説}}$

(i)

$$12345654321 = 111111^2 = (111 \cdot 1001)^2$$

となり，$111 = 3 \cdot 37$，$1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ となるので，最大の素因数は 37.　$\cdots$(答)

また，$37 = 2^5 + 2^2 + 1$ となるので，2 進数で表すと 100101.　$\cdots$(答)

(ii)　$\bar{x} = \dfrac{m+80}{3}$ となり，偏差値は

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} {x_i}^2 - \bar{x}^2 \\ &= \frac{0^2 + 80^2 + m^2}{3} - \left(\frac{m+80}{3}\right)^2 = \frac{2m^2 - 160m + 12800}{9} \end{aligned}$$

となるので標準偏差は $\sqrt{v}=\dfrac{\sqrt{2m^2-160m+12800}}{3}$ となり，0 点の人の偏差値は

$$t_1=50+\frac{10(0-\bar{x})}{\sqrt{v}}=50-\frac{10(m+80)}{\sqrt{2m^2-160m+12800}}.\qquad\cdots(\text{答})$$

また，この偏差値が最小となるときは（計算すると）$m=80$ のときとなり，そのときの最小値は $50-10\sqrt{2}$. $\qquad\cdots$(答)

(iii) $a_2=\dfrac{1}{15}$, $\dfrac{1}{35}$ となるので，帰納法を用いて，$a_n=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ $\qquad\cdots$(答)

が示される.（漸化式の両辺を a_na_{n+1} で割って求めてもできる.）

このとき，

$$S_{100}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{100}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{201}\right)=\frac{100}{201}.\qquad\cdots(\text{答})$$

[II] 次の $\boxed{}$ を埋めよ．答は解答用紙の該当欄に記入せよ．

(i) $f(x)=\sin 2x-4\sin x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ とする．$t=\cos x$ とおくとき $f(x)$ を t の式で表すと $\boxed{(1)}$ である．また，$f(x)$ の最小値は $\boxed{(2)}$ である．

(ii) 楕円 $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上の点 $\mathrm{P}\left(\sqrt{3},\ \dfrac{1}{2}\right)$ における接線を l とする．このとき l に垂直な C の接線の方程式は $\boxed{(3)}$ である．また，l に垂直な C の接線と l および l に平行な C の接線で囲まれる長方形の面積は $\boxed{(4)}$ である．

$\boxed{\text{解答}}$ (i) $\boxed{(1)}=2(t-2)\sqrt{1-t^2}$, $\boxed{(2)}=-\sqrt{9+6\sqrt{3}}$

(ii) $\boxed{(3)}:y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}x\pm\dfrac{\sqrt{57}}{3}$, $\boxed{(4)}=\dfrac{16}{7}\sqrt{19}$

$\boxed{\text{解説}}$

(i) $\sin x=\sqrt{1-t^2}$ となり，

$$\begin{aligned}f(x)&=2\sin x\cos x-4\sin x\\&=2\sin x(\cos x-2)=2(t-2)\sqrt{1-t^2}.\qquad\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

また，$-1\leqq t\leqq 1$ におけるこの最小値を微分して求めると，$t=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ のときとなり，このとき求める最小値は

$$-(3+\sqrt{3})\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\sqrt{9+6\sqrt{3}}.\qquad\cdots(\text{答})$$

(ii)　点 P における楕円 C の接線の式は

$$\frac{\sqrt{3}}{4}x+\frac{1}{2}y=1 \Longleftrightarrow y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+2$$

となるのでこの傾きは $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となり，傾きが $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ の接線を求めればよく，それは

$$y=\frac{2}{\sqrt{3}}x\pm\frac{\sqrt{57}}{3}. \qquad \cdots(\text{答})$$

また，題意の長方形の 2 辺の長さの半分は，原点 O からそれぞれの接線までの距離となる．点と直線の距離の公式を用いると，その距離はそれぞれ $\dfrac{4}{\sqrt{7}},\ \sqrt{\dfrac{19}{7}}$ となり，求める長方形の面積は

$$\frac{8}{\sqrt{7}}\cdot 2\sqrt{\frac{19}{7}}=\frac{16}{7}\sqrt{19}. \qquad \cdots(\text{答})$$

[III]　（記述問題）

k を整数とする．関数 $f(x)=xe^{-x}+e^{2x-k}$ について次の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(i)　$y=f(x)$ が極値をもたないような k の最大値を求めよ．

(ii)　k が (i) の条件をみたす最大値のとき，$y=f(x)$ のグラフと $x=0,\ x=1$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

解答　(i)　$k=5$　(ii)　$1-\dfrac{2}{e}+\dfrac{1}{2e^3}-\dfrac{1}{2e^5}$

解説

(i)

$$\begin{aligned} f'(x)&=e^{-x}-xe^{-x}+2e^{2x-k}\\ &=e^{2x}(e^{-3x}-xe^{-3x}+2e^{-k}) \end{aligned}$$

（最後は e^{-k} について文字定数分離した）となり，$e^{-3x}-xe^{-3x}+2e^{-k}$ の部分が符号変化しなければよい．その条件を（微分して）求めると

$$2e^{-2k}-\frac{1}{3}e^{-4}>0 \Longleftrightarrow k<4+\log 6(=5.79\cdots)$$

となるので，求める整数 k の最大値は $k=5$. $\qquad\cdots$(答)

(ii)　$0 \leqq x \leqq 1$ において常に $f(x) > 0$ となるので，求める囲まれる部分の面積は

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 (xe^{-x} + e^{2x-k})\,dx \\ &= \cdots = 1 - \frac{2}{e} + \frac{1}{2e^3} - \frac{1}{2e^5}. \qquad \cdots(\text{答})\end{aligned}$$

講評

大問が 3 問で，前半の 2 つが小問集合．最後の大問 [III] が数 III 微積分の記述問題なのは例年と特に変わりない．

[I]　答えのみの小問集合．どれも解きにくい．

(i) は整数の素因数分解で，12345654321 が 111111^2 であることに気づけた人は早かった．

(ii) はデータの分析（偏差値）の問題．答えも汚く出来てない受験生も多かったのではないだろうか．データの分析の問題は去年に続き，2 年連続の出題．

(iii) は一見見慣れない漸化式だが，一般的な解き方に気づかなくても，a_2，$a_3, \cdots$ と求めていくうちに一般項 a_n の予想が立つだろう（厳密には数学的帰納法）．そこまでいったら，あとは難しくない．

[II]　[I] と同様，答えのみの小問集合．しかし [I] よりかは解き易かったのではないだろうか．

(i) は数 III の微分の問題．答えは汚くなり，やや不安になりがちな問題だが，本問は計算一本道で絶対に落とせない問題である．

(ii) は楕円の直交する 2 接線の問題．本問も $\sqrt{19}$ が出てきて，若干不安になるかもしれない．長方形の面積まで正しく出せた受験生は，アドバンテージとなっただろう．

[III]　数 III 微積分の総合問題．(i) の極値をもたない条件は e^{-k} について分離して考えると解ける．(ii) は (i) が出来た人のためのオマケ問題だろう．

総じて，数 III 微積分の問題をしっかりと取りきり，残りの小問集合で解ける問題に食らいついていく，というのが戦略であろう．目標は 65 %．