2019年　東海大学医学部 (2 日目)　　解答解説【数学】

次の空欄を埋めなさい．

解答は，分数の場合には既約分数の形で書きなさい．

$\boxed{1}$

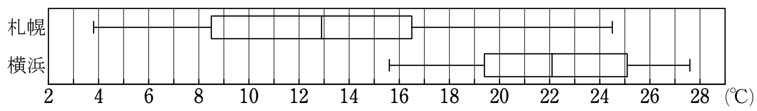
(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$ の値は $\boxed{\quad ア \quad}$ である．

(2) 円に内接する四角形 ABCD が与えられている．各辺の長さが AB$=4$，BC$=4$，CD$=3$，DA$=5$ を満たすとき，線分 BD の長さは $\boxed{\quad イ \quad}$ である．また四角形 ABCD の面積は $\boxed{\quad ウ \quad}$ である．

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{99} n!$ の一の位の数字は $\boxed{\quad エ \quad}$ である．

(4) 四面体 OABC において，OA=OB=OC$=\sqrt{2}$，AB=CA$=\sqrt{3}$ とする．三角形 ABC の重心を G とするとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ の値は $\boxed{\quad オ \quad}$ である．

(5) 下の図は，2018 年 4 月の 30 日間の札幌と横浜における各日ごとの最高気温についての箱ひげ図である．



(出典：「過去の気象データ (気象庁)」を加工して作成)

以下の a から f の記述のうち，これら 2 つの箱ひげ図から読み取れる正しいものは $\boxed{\quad カ \quad}$ と $\boxed{\quad キ \quad}$ である．

a. 札幌では最高気温が 15 ℃ を超えた日が 15 日以上であった．

b. 横浜では最高気温が 25 ℃ を超えた日が 7 日以上であった．

c. 最高気温の中央値は，横浜の方が札幌よりも 10 ℃ 以上高い．

d. 札幌の最高気温の四分位範囲は，10 ℃ 以下である．

e. 最高気温の四分位範囲は，横浜の方が札幌よりも小さい．

f. 最高気温について，札幌の第 3 四分位数は，横浜の第 1 四分位数よりも 5 ℃ 以上低い．

$\boxed{解答}$ (1) ア．$\dfrac{2}{3}$　　(2) イ．$\sqrt{31}$　　ウ．$4\sqrt{15}$　　(3) エ．3

(4) オ．1　　(5) カ．d　　キ．e

$\boxed{\text{解説}}$

(1)

$$\sqrt[n]{\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{1}{3}\left(1+2^n\right)^{\frac{1}{n}}$$

と変形すると

$$2^n<1+2^n<2^n+2^n=2^{n+1}$$

であるから，

$$\frac{1}{3}\cdot 2<\frac{1}{3}\left(1+2^n\right)^{\frac{1}{n}}<\frac{1}{3}\cdot 2^{1+\frac{1}{n}}$$

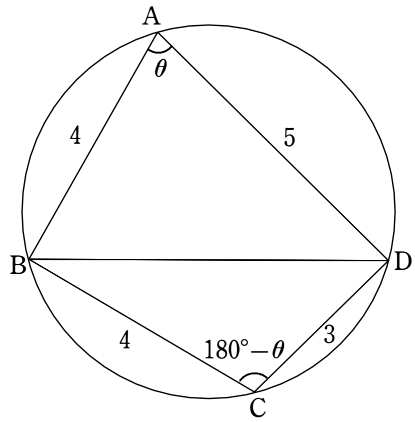
が成り立つ．$n\longrightarrow\infty$ のとき最右辺は $\dfrac{2}{3}$ に収束するから，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\underline{\frac{2}{3}}_{\text{ア}}$$

(2) $\angle\mathrm{A}=\theta$ とおく． $\cos C=-\cos A$ であることに注意して，$\triangle\mathrm{ABD}$ と $\triangle\mathrm{BCD}$ で余弦定理を用いると

$$\mathrm{BD}^2=4^2+5^2-2\cdot4\cdot5\cos\theta=41-40\cos\theta$$

$$\mathrm{BD}^2=4^2+3^2+2\cdot4\cdot3\cos\theta=25+24\cos\theta$$



2 式より BD^2 を消去して $\cos A=\dfrac{1}{4}$ を得るので，$\underline{\mathrm{BD}=\sqrt{31}}_{\text{イ}}$

また，$\sin A=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ なので四角形 ABCD の面積は $\triangle\mathrm{ABD}$ と $\triangle\mathrm{BCD}$ の面積を考えて，

$$\frac{1}{2}\cdot4\cdot5\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}+\frac{1}{2}\cdot4\cdot3\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=\underline{4\sqrt{15}}_{\text{ウ}}$$

(3) $n\geqq 5$ のとき $n!$ は 2 と 5 を素因数にもつので，一の位は 0 であるから

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=1}^{99}n!\ \text{の一の位}\right)&=(1!+2!+3!+4!\ \text{の一の位})\\&=\underline{3}_{\text{エ}}\end{aligned}$$

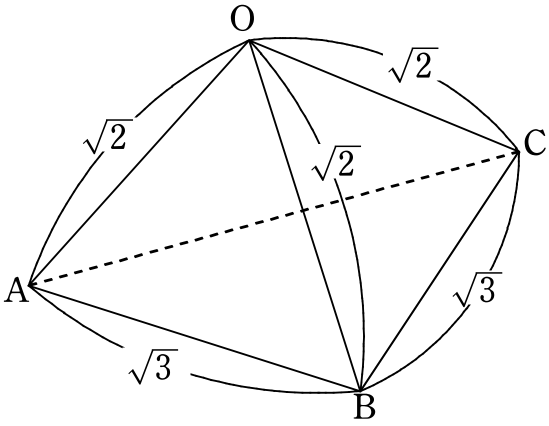
(4) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$

また，

$$3=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=4-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

より $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{2}$ 同様に，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OG}}&=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\\&=\frac{1}{3}\left(2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\\&=\underline{1}_{オ}\end{aligned}$$



(5) d と e が箱ひげ図に該当することは比較的分かりやすいと思われる．しかし，横浜の第 3 四分位数が僅かに 25℃ を超えていると見受けられるので，b も箱ひげ図に該当する記述であると判断できなくもない．解答欄は 2 つなので，出題ミスではないだろうか．

$\boxed{2}$ $x>0$ とする．曲線 C_1 と曲線 C_2 を次のように定める．

$$C_1\colon y=\frac{1}{x},\ C_2\colon y=-\frac{x-2}{x-1}$$

(1) C_1 と C_2 の両方に接する直線を l_1，l_2 とするとき，これらの方程式は，

$$l_1\colon y=\boxed{\text{ア}},\ l_2=\boxed{\text{イ}}$$

である．ただし，l_1 の傾きを a_1，l_2 の傾きを a_2 と表すとき，$a_1>a_2$ とする．

(2) C_1 と C_2 の交点の座標は $(\boxed{\text{ウ}},\boxed{\text{エ}})$ であり，この交点を通り l_2 と直交する直線の方程式は，$y=\boxed{\text{オ}}$ である．また，C_2 と l_1 の接点の座標は $(\boxed{\text{カ}},\boxed{\text{キ}})$ である．

(3) C_1 と C_2 および l_1 によって囲まれる図形の面積は $\boxed{\text{ク}}$ である．

解答

(1) ア．$y=-x+2$，　イ．$y=-\dfrac{1}{(\sqrt{5}-2)^2}x+2(\sqrt{5}+2)$

(2) ウ．エ．$\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2},\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$　オ．$y=(\sqrt{5}-2)^2\left(x-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)+\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

カ．キ．$(2,\ 0)$

(3) ク．$2\log\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{2}-2$

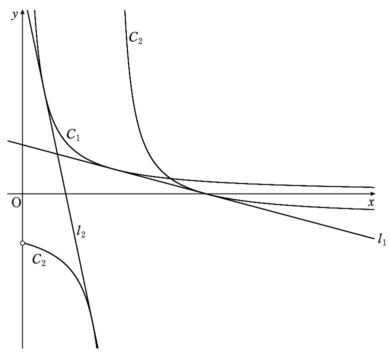
解説

(1)

$C_1\colon y=\dfrac{1}{x}$ に対し，$y'=-\dfrac{1}{x^2}$．

$C_2\colon y=-\dfrac{x-2}{x-1}=\dfrac{1}{x-1}-1$ に対し，

$y'=-\dfrac{1}{(x-1)^2}$．



C_1 上の接点を $\left(t_1,\dfrac{1}{t_1}\right)$ とおくと接線の方程式は

$$y=-\frac{1}{{t_1}^2}x+\frac{2}{t_1}\cdots①$$

C_2 上の接点を $\left(t_2,\dfrac{1}{t_2}\right)$ とおくと接線の方程式は

$$y=-\frac{1}{(t_2-1)^2}x+\frac{-{t_2}^2+4t_2-2}{(t_2-1)^2}\cdots②$$

①, ② は同一の直線なので係数を比較して

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{{t_1}^2} = -\dfrac{1}{(t_2-1)^2} \\ \dfrac{2}{t_1} = \dfrac{-{t_2}^2+4t_2-2}{(t_2-1)^2} \end{cases}$$

1 つ目の式から $\pm t_1 = t_2 - 1$ とわかるので，これらと 2 つ目の式から，t_2 を消去して計算すると $t_1 = \pm 1, -2 \pm \sqrt{5}$．$t_1$ は正より $t_1 = 1, \sqrt{5}-2$ を得る．① へ代入して

$$l_1\colon y = \underline{-x+2}_{ア},\ l_2\colon y = \underline{-\frac{1}{(\sqrt{5}-2)^2}x + 2(\sqrt{5}+2)}_{イ}$$

(2) C_1 と C_2 の式を連立して $\left(\underline{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}}_{ウ}, \underline{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}_{エ}\right)$．

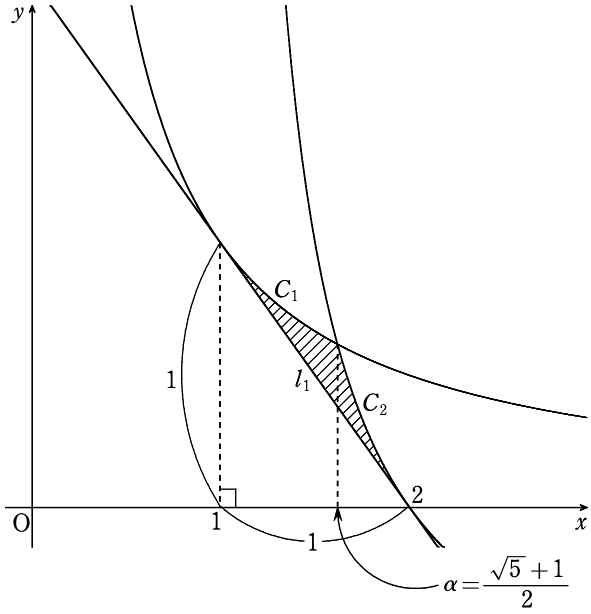
この点を通り l_2 と直交する直線の方程式は，

$$y = \underline{(\sqrt{5}-2)^2\left(x - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \frac{\sqrt{5}-1}{2}}_{オ}$$

また，C_2 と l_1 の接点の座標は (1) より $\left(t_2, -\dfrac{t_2-2}{t_2-1}\right)$ であるが，$t_1 = 1$ のとき $t_2 = 2$ であるので，$(\underline{2}_{カ}, \underline{0}_{キ})$

(3) 次ページ図より求める面積は，$\alpha = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ とおくと

$$\begin{aligned}
&\int_1^{\alpha} \frac{1}{x}dx + \int_{\alpha}^{2}\left(\frac{1}{x-1} - 1\right)dx - \frac{1}{2}\cdot(2-1)\cdot 1 \\
&= [\log x]_1^{\alpha} + [\log(x-1) - x]_{\alpha}^{2} - \frac{1}{2} \\
&= \log\frac{\sqrt{5}+1}{2} - \log 1 + (\log 1 - 2) - \left(\log\frac{\sqrt{5}-1}{2} - \alpha\right) - \frac{1}{2} \\
&= \log\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} - 2 + \frac{\sqrt{5}+1}{2} - \frac{1}{2} \\
&= \underline{2\log\frac{\sqrt{5}+1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} - 2}_{ク}
\end{aligned}$$



y
C1
1
l1
C2
2
O
1
1
x
α = (√5 + 1)/2

$\boxed{3}$ 複素数 α に対応する複素数平面上の点を $\mathrm{A}(\alpha)$ と書く．動点 P が次の規則で複素数平面上を移動する．

・時刻 0 のとき，P は $\mathrm{A}(1)$ に存在する．

・t は 0 以上の整数とする．時刻 t のときに P が $\mathrm{A}(\alpha)$ に存在する場合，時刻 $t+1$ では P は確率 p で $\mathrm{A}(2\alpha)$ に存在し，確率 $1-p$ で $\mathrm{A}((1+i)\alpha)$ に存在する．

(1) $\mathrm{A}(-2)$，$\mathrm{A}(-4)$，$\mathrm{A}(2i)$，$\mathrm{A}(-4i)$，$\mathrm{A}(2+2i)$，$\mathrm{A}(2-2i)$ のうち，P が決して到達できない点は $\boxed{\text{ア}}$ である．ただし $\boxed{\text{ア}}$ には該当する点を全て書け．

(2) 時刻 2 のときに P が $\mathrm{A}(2+2i)$ に存在する確率は $\boxed{\text{イ}}$ である．

(3) 時刻 5 のときに P が $\mathrm{A}(-8)$ に存在する確率は $\boxed{\text{ウ}}$ である．

(4) 時刻 t のときに P が実軸の正の部分に存在する確率を $R(t)$ とする．このとき
$R(8)=\boxed{\text{エ}}$，$R(9)=\boxed{\text{オ}}$，$R(16)=\boxed{\text{カ}}$ が成り立つ．

(5) 時刻 2019 のとき，P が実軸の正の部分の点 $\mathrm{A}(r)$ に存在する．このような r のうち最大のものは 2 の $\boxed{\text{キ}}$ 乗である．最小のものは 2 の $\boxed{\text{ク}}$ 乗である．

解答

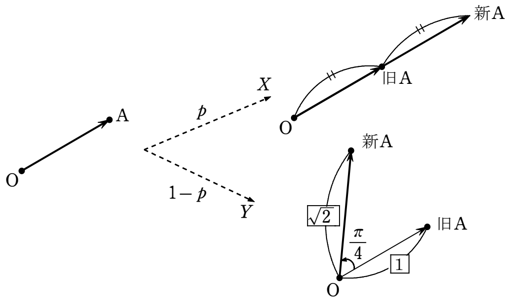
(1) ア．$\mathrm{A}(-2)$，$\mathrm{A}(-4i)$，$\mathrm{A}(2-2i)$　(2) イ．$2p(1-p)$　(3) ウ．$5p(1-p)^4$

(4) エ．$p^8+(1-p)^8$　オ．$p^9+9p(1-p)^8$　カ．$p^{16}+12870\,p^8(1-p)^8+(1-p)^{16}$

(5) キ．2019　ク．1011

解説

問題を解き始める前に, どのような点の移動が行われているのかを把握することがこの問題を解く最大のポイントである. その際, ベクトルの変換をイメージすると分かりやすいだろう. 次の図のようになる.



以下, $\mathrm{A}(\alpha) \to \mathrm{A}(2\alpha)$ の変換を X, $\mathrm{A}(\alpha) \to \mathrm{A}((1+i)\alpha)$ の変換を Y で表すことにする.

(1) A(-2), A(-4) について実軸上負の部分に到達するためには, 最低 4 回 Y が起こらなければならないから, 最低 $(\sqrt{2})^4 = 4$ 倍の拡大が起こる. したがって, 点-2 には到達できないが, Y がちょうど 4 回起こると-4 には到達できる.

$\mathrm{A}(2i)$ について Y がちょうど 2 回起こると $2i$ に到達できる.

$\mathrm{A}(-4i)$ について虚軸負の部分に到達するためには, 最低 6 回 Y が起こらなければならないから, 最低 $(\sqrt{2})^6 = 8$ 倍の拡大が起こる. したがって, 点 $-4i$ には到達できない.

$\mathrm{A}(2+2i)$ について X が 1 回, Y が 1 回起こると到達できる.

$\mathrm{A}(2-2i)$ について $\arg(2-2i) = \frac{7}{4}\pi$ であるから, 最低 7 回 Y が起こらなければならない. しかし最低 7 回 Y が起こるとき, 少なくとも $(\sqrt{2})^7 = 8\sqrt{2}$ 倍の拡大が起こる. $|2-2i| = 2\sqrt{2}$ であるから, 点 $2-2i$ には到達できない. したがって P が決して到達できない点は $-2, -4i, 2-2i$ の 3 点である.

(2) X が 1 回, Y が 1 回起こるとよいから, 求める確率は

$$p \times (1-p) \times 2 = \underline{2p(1-p)}_{ア}$$

(3) X が 1 回, Y が 4 回起こるとよいから, 求める確率は

$$p \times (1-p)^4 \times 5 = \underline{5p(1-p)^4}_{イ}$$

(4) $R(8)$ について (X が起こる回数, Y が起こる回数) $= (8,0), (0,8)$ ならよいから,

$$R(8) = \underline{p^8 + (1-p)^8}_{ウ}$$

$R(9)$ について (X が起こる回数, Y が起こる回数) $= (9,0), (1,8)$ ならよいから,

$$R(9) = \underline{p^9 + 9p(1-p)^8}_{エ}$$

$R(16)$ について $(X$ が起こる回数, Y が起こる回数$) = (16, 0), (8, 8), (0, 16)$ ならよいから,

$$R(16) = p^{16} + {}_{16}\mathrm{C}_8 \cdot p^8(1-p)^8 + (1-p)^{16} = \underline{p^{16} + 12870\, p^8(1-p)^8 + (1-p)^{16}}_{\text{カ}}$$

(5) X の回数が多ければ多いほど r は大きくなり, Y の回数が多ければ多いほど r は小さくなる. r が最大となるのは X が 2019 回起こるときであるから,

$$r_{\max} = \underline{2^{2019}}_{\text{キ}}$$

r が最小となるのは Y が 2016 回, X が 3 回起こるときであるから,

$$r_{\min} = (\sqrt{2})^{2016} \times 2^3 = \underline{2^{1011}}_{\text{ク}}$$