2019年　慈恵医科大学　解答速報（数学）

1. 次の $\boxed{}$ にあてはまる適切な数値を解答欄に記入せよ．

(1)　xy 平面上を動く点 P が，最初に座標 $(2,\ 0)$ の位置にある．白玉 2 個，赤玉 1 個，青玉 1 個が入っている袋から玉を 1 個取り出し，色を調べてからもとに戻す．取り出した玉の色によって，次のように P を移動し硬貨をもらう試行を考える．

P が座標 $(m,\ n)$ の位置にあるとき，

- 取り出した玉の色が白色ならば，P は座標 $(m+1,\ n)$ の位置へ移動
- 取り出した玉の色が赤色ならば，P は座標 $(m,\ n+1)$ の位置へ移動
- 取り出した玉の色が白色ならば，P は座標 $(m-1,\ n)$ の位置へ移動

移動後に，P の x 座標と y 座標の和が 0 または 3 のとき，硬貨を 1 枚もらう．この試行を 4 回続けて行う．

このとき，3 回目の試行で初めて硬貨をもらう確率は $\boxed{（ア）}$ であり，4 回目の試行で硬貨をもらい，かつ，もらう硬貨の総数が 2 枚となる確率は $\boxed{（イ）}$ である．

(2)　△ ABC において，AB$=4$，BC$=5$，CA$=6$ とする．△ ABC の重心 G から辺 BC に下ろした垂線を GH とするとき，$\dfrac{\mathrm{BH}}{\mathrm{BC}}$ の値は $\boxed{（ウ）}$ である．

$\boxed{解答}$　(1)　$\boxed{（ア）} = \dfrac{9}{64}$，　$\boxed{（イ）} = \dfrac{9}{256}$　(2)　$\boxed{（ウ）} = \dfrac{11}{30}$

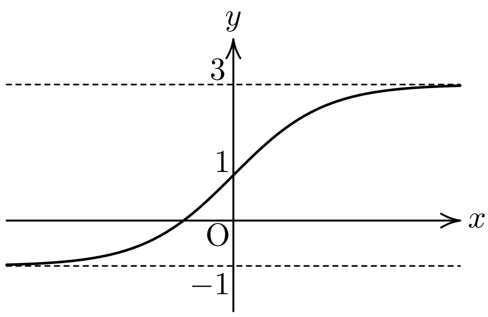
2. a, b は定数で $a>1$ とする．2 つの曲線 $C_1 : y=\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}$, $C_2 : y=\dfrac{e^x}{a^2}+b$ が共有点 P をもち，点 P において共通の接線をもつとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) C_1 の凹凸および変曲点を調べ，C_1 の概形を描け．

(2) 点 P の座標と b を a で表せ．

(3) C_1, C_2 と y 軸で囲まれた部分の面積 $S(a)$ を a で表せ．また，極限値 $\displaystyle\lim_{a\to\infty} S(a)$ を求めよ．ただし，必要ならば $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ であることを用いてよい．

$\boxed{\text{解答}}$ (1) C_1 のグラフは下図，変曲点は $(0,\ 1)$.



(2) $\mathrm{P}\left(\log(2a-1),\ \dfrac{3a-2}{a}\right)$, $b=\dfrac{(3a-1)(a-1)}{a^2}$

(3) $S(a)=\dfrac{2(a-1)}{a^2}+\left(\dfrac{2a-1}{a}\right)^2\log(2a-1)-4\log a$, $\displaystyle\lim_{a\to\infty} S(a)=4\log 2$

3. m, n は自然数の定数とする．自然数 x, y が不等式

$$y \leqq -x^2+20nx, \quad y \geqq \frac{12n}{m}x$$

をみたすとき，m の値に応じて，$y-x$ の最大値と，そのときの x, y の値を n で表せ．

$\boxed{\text{解答}}$ $(x,\ y)=(8n,\ 96n^2)$ のとき最大値 $96n^2-8n$ 　$(m=1$ のとき$)$

$(x,\ y)=(10n-1,\ 100n^2-1)$, $(10n,\ 100n^2)$ のとき，最大値 $100n^2-10n$ 　$(m \geqq 2$ のとき$)$

4.　方程式 $x^3+1=0$ の解のうち，虚部が正であるものを α とする．複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(-1)$，$\mathrm{C}(\overline{\alpha})$ を頂点とする△ ABC を考える．△ ABC の周上の点 $\mathrm{P}(z)$ に対して，原点 O を端点とし $\mathrm{P}(z)$ を通る半直線上に $|w|=\dfrac{1}{|z|}$ をみたす点 $\mathrm{Q}(w)$ をとるとき，次の問いに答えよ．ただし，複素数 γ に共役な複素数を $\overline{\gamma}$ で表し，複素数平面上で複素数 γ を表す点 G を $\mathrm{G}(\gamma)$ と書く．

(1)　$w=\dfrac{1}{\overline{z}}$ となることを示せ．

(2)　$\mathrm{P}(z)$ が△ ABC の周上を動くとき、$\mathrm{Q}(w)$ が描く図形によって囲まれた部分の面積 S を求めよ．

$\boxed{\text{解答}}$　(1) 条件より，$w=kz$　(k は正の実数) とおけ，$|w|=\dfrac{1}{|z|}$ より

$$k|z|=\frac{1}{|z|} \quad \Longleftrightarrow \quad k=\frac{1}{|z|^2}$$

となるので，

$$w=\frac{z}{|z|^2}=\frac{z}{z\overline{z}}=\frac{1}{\overline{z}}. \qquad \text{(証明終)}$$

(2) $S=2\pi+\dfrac{3}{2}\sqrt{3}.$

講評

大問が 4 問で，最初の大問 1. は穴埋め式の小問集合，大問 2.〜4. は記述式の大問であったことは，例年から特に変わりはない．

1. 穴埋め式の小問集合．

(1) は座標平面上の格子点を取り出した玉の色に応じて移動させるという確率の問題．試行の数も 4 回で，考えるべき状況は特に複雑ではないので，慈恵医大受験生は完答すべき問題である．

(2) は図形の計量の問題．センター試験レベル $+\alpha$ くらいの問題なので，こちらも慈恵医大受験生なら落とせない問題である．

2. は，例年のように数 III 微積分の融合問題である．凹凸も含めたグラフの図示，曲線が接する条件，囲まれる部分の面積，極限 $\cdots$etc, 様々な題材が含まれている．無論，そこまで躓く点はないが，**とにかく計算量が多い．計算ミスすることなく，最後まで完答できるかどうかが合否を左右するであろう．**

3. は，「領域内の最大・最小」という一見ありふれた題材だが，文字が多くて混乱をきたした受験生もいるのではないだろうか．「m の値に応じて，〜(略)〜 n で表せ．」という問われ方であり，更に文字定数 m, n，および x, y は自然数なので，どう答えればよいか悩んだ受験生も少なくないだろう．問題文の正確な把握に加え，「m, n が自然数」という条件をどのように利用すればよいか，というのを正確に答えられた受験生は少なかったように思える．本問を完答できたら，自身の数学力に自信をもってよいだろう．

4. は，2 年ぶりに複素数平面からの出題である．しかし，「反転」という極めてありふれた題材の問題であり，標準的な問題なので，この問題は無理なく完答できるはずである．2016 年の東大や早稲田（理工）を始め，類題も多数出題されている．

総じて，受験生の数学力をきちんと測ることができるような標準的な良問が多い．昨年より解きにくい問題は減ったので，若干易化したと思われる．目標は 70 %．

尚，良問が多いので，慈恵医大受験生でなくても本問題を通じて，復習・演習を是非オススメしたい．