2019年　大阪医科大学　解答速報（数学）

〔1〕　$\triangle$ ABC は，3 辺の長さ BC$=a$，CA$=b$，AB$=c$ が整数で $\angle$ BAC$=\dfrac{\pi}{3}$ を満たすとする．

(1)　$ab=21$ を満たすような $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ．

(2)　$a+b+c=\dfrac{bc}{2}$ を満たすような $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ．

$\boxed{\text{解答}}$　(1)　$(a,\ b,\ c)=(7,\ 3,\ 8)$　(2)　$(a,\ b,\ c)=(7,\ 5,\ 8),\ (7,\ 8,\ 5),\ (6,\ 6,\ 6)$

〔2〕

(1)　$t \geqq 0$ のとき，不等式 $\dfrac{t^2}{2}<e^t$ を示せ．

(2)　実数 c に対して，直線 $y=c$ と関数 $y=(x^2-1)e^{-x^2}$ のグラフとの共有点の個数を求めよ．

$\boxed{\text{解答}}$　(1)　略　(2)　$c<-1,\ c>\dfrac{1}{e^2}$ のとき 0 個．　$c=-1$ のとき 1 個．$-1<c \leqq 0,\ c=\dfrac{1}{e^2}$ のとき 2 個．　$0<c<\dfrac{1}{e^2}$ のとき 4 個．

〔3〕　さいころを 4 回投げて出た目をそれぞれ $Z_1,\ Z_1',\ Z_2,\ Z_2'$ とし，$X_i\ (i=1,\ 2)$ を次のように定義する．

$$X_i=\begin{cases} Z_i & (Z_i \geqq 4 \text{ のとき}) \\ Z_i+Z_i' & (Z_i \leqq 3,\ Z_i+Z_i' \leqq 6 \text{ のとき}) \\ 6 & (Z_i \leqq 3,\ Z_i+Z_i'>6 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(1)　X_1 がとりうる値とそれぞれの確率を求めよ．

(2)　$Z_1=1$ のとき，$X_1+X_2=6$ である条件付き確率を求めよ．

(3)　$X_1+X_2=6$ のとき，$Z_1=1$ である条件付き確率を求めよ．

$\boxed{\text{解答}}$　(1)　$X_1=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$　それぞれの確率は順に $\dfrac{1}{36},\ \dfrac{1}{18},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{5}{12}$.
(2)　$\dfrac{1}{18}$　(3)　$\dfrac{6}{11}$

〔4〕

(1)　A，O を AO$=1$ を満たす平面の定点とし，C を O を中心とする半径 a $(a<1)$ の円とする．点 P が，

　　条件：線分 AP と円 C との共有点が P のみである

を満たすように C 上を動くとき，線分 AP の長さの最大値と最小値を求めよ．

(2)　A，O を AO$=1$ を満たす空間の定点とし，S を O を中心とする半径 a $(a<1)$ の球面とする．S 上の点 P で，

　　条件：線分 AP と球面 S との共有点が P のみである

を満たすものを考えて，すべての P に対する線分 AP の和集合を K とする．K の体積 V を求めよ．

$\boxed{\text{解答}}$　(1) 最大値：$\sqrt{1-a^2}$，最小値：$1-a$　(2) $V=\dfrac{\pi}{3}a^2(1-a)^2$

〔5〕　i を虚数単位とし，複素数 z に対し，$\bar{z}$，$\arg z$ をそれぞれ z の複素共役，偏角とする．

(1)　$|w_1|=|w_2|=1$ である複素数 w_1，w_2 に対し $\theta=\arg\dfrac{w_1}{w_2}$ とするとき，$|w_1-w_2|=2\left|\sin\dfrac{\theta}{2}\right|$ を示せ．

(2)　$\alpha=-1$，$\beta=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$，$\gamma=\bar{\beta}$ とする．複素数 z が $|z|=1$ を満たすように動くとき，$|z-\alpha|+|z-\beta|+|z-\gamma|$ の最大値と最小値を求めよ．

$\boxed{\text{解答}}$　(1) 略　(2) 最大値：4，最小値：$2\sqrt{3}$

講評

大問が 5 問で，全問記述式．以前からこの出題形式は全く変わりがない．

〔1〕は図形の形をした整数問題．きちんと場合分けをしていけば解ける問題ではあるが，5 問中最も完答しにくい問題かもしれない．

〔2〕は数 III 微分の問題．(2) はグラフを描いて調べればよいだけだけなのだが，$x \to \pm\infty$ における極限は (1) の不等式の証明問題もあるわけなので，それを用いて厳密に示す必要がある．

〔3〕はさいころを題材とした確率の問題．状況を把握するのに一苦労するだろう．ただ状況をきちんと把握して (1) の問題が解ければ，後半の条件付き確率の問題はそこまで苦なく解けるだろう．本問は，「ブラックジャック」というトランプのゲームをモデルに単純化した問題である．

〔4〕は図形と求積の問題．(1) が平面 ver. の問題で，(2) は空間 ver. の問題だが，(1) は (2) のためのヒントになっている（回転体を考えればよい）．あとは座標を設定して，きちんとミスすることなく求積計算ができるかどうかがカギとなる．

〔5〕は複素数平面の問題だが，実質複素数平面はほとんど関係のない図形量の最大最小の問題である．三角関数の最大最小に落とし込めばよい．

総じて，受験生の数学力をきちんと測ることができるようなやや易〜標準的な良問が多い．昨年より解きにくい問題は減り，若干易化したと思われる．目標は 70 %．