

1

次の各問いに答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

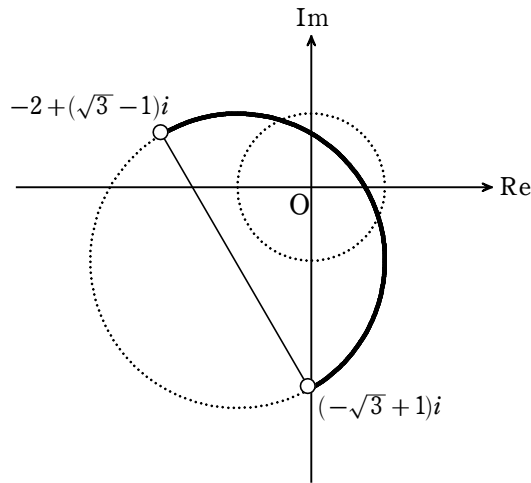
複素数平面上で、複素数 z の表す点が原点を中心とする半径 1 の円周上を動く。このとき、次の問いに答えよ。ただし i は虚数単位とする。

- (1) 方程式 $z^{12} = 1$ を満たす z の値をすべて求めよ。
- (2) 単位円の円周上を動き、虚部を正とする複素数 α に対し、 $w = (1 - \sqrt{3}i)\alpha - (1 + i)$ で表される点の軌跡を複素数平面上に図示せよ。
- (3) (2)で求めた軌跡上の点のうち、 $\left(\frac{w+1+i}{2}\right)^{12} = 1$ を満たすものをすべて答えよ。また、それらの点を(2)で描いた図中に示せ。

【解答】

(1) $z = \pm 1, \pm i, \pm \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i, \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i$ (複号は任意)

(2)



(3) $w = -(1 + \sqrt{3}) - 2i, 1 - i, \sqrt{3} - 1, (\sqrt{3} - 1)i, -1 + i$

2 次の各問いに答えよ。ただし、答えは結果のみ解答欄に記入せよ。

(1) 次のような数列

$$\frac{2}{1}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{8}{5}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}, \frac{8}{7}, \frac{10}{7}, \frac{12}{7}, \frac{2}{9}, \dots$$

を考える。このとき、分母の値が等しいものを一つの群とする。 $n \geq 2$ のとき、 n 群に含まれる数列の項数を a_n とすると、 a_n は等差数列をなす。

(1-1) 第 n 群の末項は初項から数えて何項目か。

(1-2) 初項から第 31 群の最後の項までの総和を求めよ。

(1-3) 初項からの和が最初に 2019 を超えるのは第何群の何項目か。

(2) 座標空間において、点 A $(0, 1, 2)$, B $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 4)$, C $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 4, \frac{1}{2})$ とする。この

とき、次の問いに答えよ。

(2-1) 点 P が zx 平面上を動くとき、 $AP+PB$ の最小値を求めよ。また、直線 AP の方程式を求めよ。

(2-2) 点 Q が y 軸上を、また点 R が z 軸上を動くとき、 $AQ+QC+AR+RB$ の最小値を求めよ。また、直線 QR の方程式を求めよ。

【解答】

(1) (1-1) $n^2 - n + 1$ (1-2) 932 (1-3) 46 群 58 項目

(2) (2-1) 最小値 $\sqrt{6+\sqrt{2}}$, AP の方程式 $\frac{x}{\sqrt{2}-1} = 1-y = \frac{z-2}{4-2\sqrt{2}}$

(2-2) 最小値 $5\sqrt{2}$, QR の方程式 $x=0, y=-z+3$

3 次の各問いに答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) $\log_2 5 < \frac{n}{3}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。

(2) ある円に内接する正六角形の面積を S_1 ，外接する正六角形の面積を S_2 とするとき、 $\frac{S_1}{S_2}$ の値を求めよ。

(3) 下のデータの中央値を求めよ。

14, 29, 54, 11, 63, 53, 4, 78, 25, 9

(4) 1 から 6 までの数字が記入された球が 1 球ずつある。これらの球を袋の中に入れ、3 つの球を無作為に取り出すとき、その中の最少の数字を X とする。

(4-1) $X=2$ となる確率を求めよ。

(4-2) X の期待値(平均値)を求めよ。

【解答】

(1) $n=7$ (2) $\frac{3}{4}$ (3) 27 (4) (4-1) $\frac{3}{10}$ (4-2) $\frac{7}{4}$

4 次の各問いに答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) 曲線 $y = x(x-a)(2x-a)$ と直線 $y = -x+t$ が $0 \leq t \leq a$ であるようなすべての t に対して異なる3点で交わるような a の値の範囲を求めよ。

(2)

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2 - 2x + 2}$$

を求めよ。

(3) $f'(2) = 3$ を満たす2次関数 $f(x)$ について

$$\int_{2-x}^{2+x} f(x) \sin\left(\frac{x}{2} - 1\right) dx$$

の値を求めよ。

【解答】

(1) $a > 2\sqrt{2}$ (2) $\frac{\pi}{4}$ (3) 24